HAL
open science

Construction d'une méthode multifaisceaux pour les écoulements en milieux poreux.

Léonard de Izarra, Jean-Louis Rouet, B. Izrar

To cite this version:

Léonard de Izarra, Jean-Louis Rouet, B. Izrar. Construction d'une méthode multifaisceaux pour les écoulements en milieux poreux.. 19ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2009, Marseille, France. 6 p. insu-00431607

HAL Id: insu-00431607

https://insu.hal.science/insu-00431607v1

Submitted on 12 Nov 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Construction d'une méthode multifaisceaux pour les écoulements en milieux poreux

L. DE IZARRA[a,b], J-L. ROUET[a] ET B. IZRAR[b]

a. Institut des Sciences de la Terre d'Orléans (ISTO),Université d'Orléans/CNRS/Université François Rabelais-Tours (UMR6113), 1a rue de la Férollerie, 45071 Orléans cedex 2, France
b. Institut de Combustion, d'Aérothermique, de Réactivité et d'Environnement (ICARE) -CNRS- UPR3021, 1c avenue de la Recherche Scientifique 45071 Orléans cedex 2, France

Résumé :

Les méthodes de Boltzmann sur réseaux (LBM) ont été appliquées avec beaucoup de succès aux écoulements en milieux poreux. Cependant, la diversité des échelles et la variété des conditions thermodynamiques nécessitent encore des développements et des raffinements dans différentes directions. Ce travail porte sur l'extension de l'approche LBM aux écoulements transitionnels caractérisés par un nombre de Knudsen ($0.1 \leq K_n \leq 1$) et un nombre de Mach suffisamment faible pour que les effets de compressibilité restent négligeables ($M_a < 0.3$). Cette démarche passe par l'utilisation d'un nombre de faisceaux en vitesses plus important pour une meilleure représentation des tenseurs de flux, thermiques en particulier. La construction de ces LBM multifaisceaux hors équilibre thermique est basée sur l'utilisation de la quadrature de Gauss-Hermite et justifiée théoriquement par l'approximation des moments de Grad. Les résultats du modèle sont comparés aux valeurs théoriques de débits et de vitesses de glissement à la paroi, en fonction du nombre de Knudsen, pour un écoulement de Poiseuille plan.

Abstract :

The LBM methods have been applied with success to flows in porous media. However, the scale diversity and the variety of thermodynamic conditions require further developments and refinements in differents directions. The Work presented here focuses on the extension of this approach to transitional regime characterized by a Knudsen number ($0.1 \leq K_n \leq 1$) and a Mach number low enough for the compressibility effects to be negligible ($M_a < 0.3$). Then it is necessary to increase the number of velocity streams for better representation of flux tensors, especially heat flux. The construction of these thermodynamic local non-equilibrium multistream LBM is based on Gauss-Hermite quadrature theoretically justified by the approximation of Grad's moments. Numerical results are compared with the theoretical values of mass flux and wall slip velocity as a function of the Knudsen number for a 2-dimensional Poiseuille flow.

Mots clefs : Milieux poreux, Boltzmann-BGK, LBM, régime transitionnel, cinétique.

1 Contexte

Les méthodes de gaz sur réseaux puis les méthodes de Boltzmann sur réseaux ont connu des développements importants couplés à des applications dans nombre de domaines. Leur avantage est leur extrême simplicité pour les LBM standards (comme D_2Q_9 ou D_3Q_{15}) à laquelle s'ajoute la facilité de mise en oeuvre de conditions aux limites complexes. C'est pourquoi elles ont été utilisées pour simuler des écoulements dans des milieux poreux [1]. Cependant, les LBM classiques ne peuvent traiter que des fluides incompressibles et isothermes. Des modifications ont été proposées pour dépasser ces limitations, mais elles compliquent notablement l'algorithme de base et présentent des problèmes de stabilité. D'autre part, ces méthodes s'appliquent dans le cadre hydrodynamique. Aussi, si l'on veut considérer le cas d'écoulements dans des micropores pour lesquels la distance caractéristique implique des régimes intermédiaires, alors ces méthodes ne s'appliquent plus.
Suivant les travaux de X. Shan et X. He [2], nous proposons d'utiliser un développement de la fonction de distribution selon les polynômes d'Hermite généralisés. Il est alors possible d'utiliser plus de faisceaux que dans un LBM classique, permettant de simuler des phénomènes thermiques et/ou de compression pour les écoulements hydrodynamiques et raréfiés.

2 Modèle Lattice-BGK

Les Lattice-BGK forment une famille de méthodes pour résoudre l'équation de Boltzmann avec un opérateur de collision BGK en tant qu'alternative aux équations de Navier-Stokes. Elles consistent en un jeu de ping-pong permanent entre le déplacement des faisceaux de particules monocinétiques d'un site à l'autre du réseau

(régime cinétique) et leur relaxation par collisions vers la fonction d'équilibre local (régime hydrodynamique). Plusieurs approches permettent d'obtenir cette fonction d'équilibre : soit à partir d'un développement limité de la Maxwellienne pour des valeurs de la vitesse moyenne faible [3], soit en recherchant la fonction de distribution qui maximise une certaine entropie, sous contraintes de la conservation de la densité, de la vitesse moyenne locale [3, 4] et de l'énergie totale [5]. Une autre alternative, proposée récemment par X. Shan et X. He [2], est basée sur un développement de la fonction de distribution selon les polynômes d'Hermite. La présente méthode propose d'étendre la description de la fonction de distribution en un plus grand nombre de faisceaux de vitesses. Cette augmentation du nombre de vitesses de faisceaux et le découplage entre température de quadrature et celle du système offrent la possibilité de traiter des problèmes allant à des nombres de Knudsen intermédiaires ou encore des cas non isothermes.

2.1 L'équation de Boltzmann-BGK

Pour un système de N particules identiques, de masse individuelle m et soumises à un champ de force $\mathbf{F}$, l'évolution de la fonction de distribution à une particule, notée f, est régie par l'équation de Boltzmann :

$$\frac{df(\mathbf{x},\mathbf{v},t)}{dt} \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla_{\mathbf{x}} f + \frac{\mathbf{F}(\mathbf{x},t)}{m}\cdot\nabla_{\mathbf{v}} f = \Gamma[f,f] \tag{1}$$

Où $\nabla_{\mathbf{x}}$ et $\nabla_{\mathbf{v}}$ sont respectivement les gradients dans l'espace des configurations ($\mathbf{x}$) et l'espace des vitesses ($\mathbf{v}$). Finalement, $\Gamma[f,f]$ représente l'intégrale de collisions binaires (les collisions à plus de deux particules sont négligées). Comme pour les LBM, la linéarisation de l'opérateur de collision utilisée dans cette étude est celle introduite par BGK [6] :

$$\Gamma[f,f] \equiv \Gamma_f = -\frac{1}{\tau}(f(\mathbf{x},\mathbf{v},t) - f^{eq}(\mathbf{x},\mathbf{v},t)), \tag{2}$$

Cette forme traduit la thermalisation isotrope de la fonction de distribution f, produite par les collisions entre particules vers la maxwellienne f^{eq}. En effet, la distribution f^{eq} maximise l'entropie

$$S[f] = \int f \log(f)\, d^3v \tag{3}$$

sous les contraintes de conservation des trois premiers moments de f, soient le nombre de particules, l'impulsion et l'énergie totale :

$$n \equiv \int f\, d^3v = \int f^{eq}\, d^3v, \quad n\,\mathbf{u} \equiv \int \mathbf{v}\, f\, d^3v = \int \mathbf{v}\, f^{eq}\, d^3v, \quad n\,\varepsilon \equiv \int \frac{v^2}{2}\, f\, d^3v = \int \frac{v^2}{2}\, f^{eq}\, d^3v \tag{4}$$

Le paramètre τ est un temps caractéristique de la relaxation du système vers l'équilibre. Il est relié aux coefficients de transport [7, 8] du fluide par le développement de Chapman-Enskog ; on a notamment pour la viscosité cinématique du fluide, l'expression $\nu = k_B\, T\, \tau/m$, où T est la température locale et k_B la constante de Boltzmann.

2.2 Traitement des forces extérieures

L'équation (1) peut être transformée pour faire disparaître le terme $\mathbf{F}/m \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f$ du membre de gauche de l'équation en l'incorporant à la fonction d'équilibre. Considérons la loi fondamentale de la dynamique, $\mathbf{F} = m\, d\mathbf{u}/dt$, qui, en supposant la force constante sur un intervalle de temps δt, permet d'exprimer l'accroissement de la vitesse $\delta\mathbf{u} = \delta t\, \mathbf{F}/m$. L'application d'une force extérieure se traduira alors par un décalage de la vitesse moyenne de $\delta t\, \mathbf{F}/m$ de la fonction d'équilibre f^{eq}. L'équation à résoudre est finalement :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla_{\mathbf{x}} f = -\frac{1}{\tau}(f - \check{f}^{eq}) \tag{5}$$

où $\check{f}^{eq}$ est la distribution de Maxwell-Boltzmann décalée. Par la suite, pour simplifier l'écriture, le chapeau de $\check{f}^{eq}$ sera omis.

2.3 Schéma général de résolution

La résolution numérique de l'équation (5) nécessite de discrétiser l'espace des configurations, des vitesses ainsi que le temps. En intégrant l'équation (5) entre les instants t et $t + \delta t$:

$$\int_t^{t+\delta t} \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla_{\mathbf{x}} f\right] dt' = -\int_t^{t+\delta t} \frac{1}{\tau}(f - f^{eq})\, dt' \tag{6}$$

on obtient la solution

$$f(\mathbf{x},\mathbf{v},t+\delta t) - f(\mathbf{x}-\mathbf{v}\,\delta t,\mathbf{v},t) = -\frac{\delta t}{\tau'}\left[f(\mathbf{x}-\mathbf{v}\,\delta t,\mathbf{v},t) - f^{eq}(\mathbf{x}-\mathbf{v}\,\delta t,\mathbf{v},t)\right] \tag{7}$$

pour laquelle le second membre a été évalué par la méthode des trapèzes. Cette démarche d'intégration introduit un temps de relaxation discret : $\tau' = \tau + \delta t/2$, où τ est le temps de relaxation continu et δt le pas de temps d'intégration.

2.4 Calcul de la fonction d'équilibre

Toute la difficulté dans la résolution de l'équation (7) réside dans l'évaluation de la fonction d'équilibre f^{eq}, vers laquelle f doit relaxer. En effet, si l'intégration du membre de gauche de l'équation est exacte (méthode des caractéristiques), le membre de droite suppose d'être capable de construire la fonction f^{eq}, donc de calculer les trois premiers moments de f. Dans ce but, la théorie des moments de Grad [9, 10] sera utilisée pour construire la fonction d'équilibre à partir de ces moments. D'un point de vue pratique, la méthode des moments introduit tout naturellement la quadrature de Gauss-Hermite pour l'évaluation des intégrales (4). Pour une quadrature à q points, la détermination des $q-1$ premiers moments est rendue exacte grâce à un développement de f sur $q-1$ termes. La discrétisation de l'espace des vitesses est alors imposée par la quadrature, les valeurs des vitesses discrètes correspondant aux zéros du polynôme d'Hermite de degré q. Plus précisément, on développe f selon :

$$f(\mathbf{x},\mathbf{v},t) = w^{[c_0^2]}(\mathbf{v}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(\mathbf{x},t)}{n!}\,\mathcal{H}_n^{[c_0^2]}(\mathbf{v}) \tag{8}$$

Où les a_n sont les coefficients d'Hermite du développement, $w^{[c_0^2]}(\mathbf{v}) = 1/\sqrt{2\pi c_0^2}\,\exp\left(-\mathbf{v}^2/2c_0^2\right)$ est[1] la fonction de distribution de Maxwell-Boltzmann de vitesse moyenne nulle et de température T_0, telle que $c_0 = \sqrt{k_B\,T_0/m}$ soit la vitesse de référence dans le milieu considéré. Les coefficients $a_n(x,t)$ sont calculés grâce à la relation d'orthogonalité :

$$a_n(\mathbf{x},\mathbf{v},t) = c_0^{2n} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x},\mathbf{v},t)\,\mathcal{H}_n^{[c_0^2]}(\mathbf{v})\,d\mathbf{v} \tag{9}$$

En particulier, les trois premiers ont pour expression (en notation d'Einstein) : $a_0 = \rho$, $a_{1\,\alpha} = \rho\,u_\alpha$ et $a_{2\,\alpha\beta} = \rho\,u_\alpha\,u_\beta + \rho\,(\theta - c_0^2)\,\delta_{\alpha\beta}$; où ρ est la densité massique locale, u_α la composante α de la vitesse moyenne, $\theta = k_B T/m$ et $\delta_{\alpha\,\beta}$ le symbole de Kronecker. En pratique, le développement de f est tronqué à l'ordre N ; notons $\tilde{f}$ cette fonction tronquée, puis introduisons la quadrature de Gauss-Hermite à q points[2] : $\{\mathbf{v}_i\,;\,\omega_i\}_{i=1\ldots q}$, où les $\mathbf{v}_i$ sont les q racines du polynôme d'Hermite de degré q et les ω_i sont les poids de la quadrature associée. Alors, par définition de la quadrature de Gauss-Hermite, si p est un polynôme de degré inférieur ou égal à $2q$, la quadrature de $w^{[c_0^2]}(\mathbf{v})\,p(\mathbf{v})$ est exacte :

$$\int_{-\infty}^{\infty} w^{[c_0^2]}(\mathbf{v})\,p(\mathbf{v})\,d\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{q} \omega_i\,p(\mathbf{v}_i) \tag{10}$$

Or, si $N \leq 2q$, alors $\tilde{f}$ est un tel polynôme et ses coefficients d'Hermite $\{a_m\}_{m=1\ldots N}$ peuvent êtres calculés exactement par :

$$a_m = c_0^{2n} \int_{-\infty}^{\infty} w^{[c_0^2]}(\mathbf{v})\,\frac{\tilde{f}\,\mathcal{H}_m^{[c_0^2]}(\mathbf{v})}{w^{[c_0^2]}(\mathbf{v})}\,d\mathbf{v} = c_0^{2n} \sum_{i=1}^{q} g_i\,\mathcal{H}_m^{[c_0^2]}(\mathbf{v}), \qquad \text{avec } g_i = \omega_i\,\frac{\tilde{f}_i(\mathbf{x},\mathbf{v_i},t)}{w^{[c_0^2]}(\mathbf{v}_i)} \tag{11}$$

De même en dimension D, si $q \geq 3$ les trois premiers moments de $\tilde{f}$ se calculent exactement par :

$$\rho = \sum_{i=1}^{q} g_i \qquad \rho\,\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{q} \mathbf{v_i}\,g_i \qquad D\,\rho\,\theta + \rho\,\mathbf{u}^2 = \sum_{i=1}^{q} \mathbf{v_i}^2\,g_i \tag{12}$$

[1] $w^{[c_0^2]}(\xi)$ est d'autre part la mesure par rapport à laquelle les polynômes d'Hermite $\mathcal{H}_n^{[c_0^2]}$ sont orthogonaux ainsi que la fonction de pondération de la quadrature de Gauss-Hermite généralisée.

[2] En dimension 2 et 3, les vitesses sont construites par combinaison des vitesses 1D et les poids de la quadrature sont les produits des poids associés aux vitesses 1D.

Grâce à ces trois moments, une fonction d'équilibre $g_i^{eq} = \omega_i \, \dfrac{\tilde{f}_i^{eq}(\mathbf{x}, \mathbf{v_i}, t)}{w(\mathbf{v}_i)}$ peut alors être construite sur la base de l'équation (8), mais tronquée à l'ordre trois :

$$g_i^{eq} = \omega_i \left(a_0(\mathbf{x}, t)\, \mathcal{H}_0^{[c_0^2]}(\mathbf{v}_i) + a_1(\mathbf{x}, t)\, \mathcal{H}_1^{[c_0^2]}(\mathbf{v}_i) + \frac{1}{2}\, a_2(\mathbf{x}, t)\, \mathcal{H}_2^{[c_0^2]}(\mathbf{v}_i) \right) \tag{13}$$

$$= \omega_i \left(\rho + \rho\, \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_i}{c_0^2} + \rho\, \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_i)^2}{2\, c_0^4} + \rho \frac{(\theta - c_0^2)}{2} \left(\frac{\mathbf{v}_i^2}{c_0^4} - \frac{D}{c_0^2} \right) - \rho \frac{\mathbf{u}^2}{2\, c_0^2} \right) \tag{14}$$

Ou encore :

$$g_i^{eq} = \rho\, \omega_i \left(1 + \frac{(\mathbf{v}_i - \mathbf{u})^2}{c_0^2} + \frac{(\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{u})^2}{2\, c_0^2} + \frac{\theta\, \mathbf{v}_i^2}{2\, c_0^2} - D\, \frac{\theta - c_0^2}{2\, c_0^2} \right) \tag{15}$$

L'équation (15) montre que la positivité de g_i^{eq} est assurée pour $c_0^2 \geq \theta \; \forall i$.

2.5 Les systèmes basés sur $\mathcal{H}_3$ et $\mathcal{H}_4$ en deux dimensions

Pour $N = 3$, la quadrature, notée $\mathcal{H}_3$, est la suivante :

$$\{\mathbf{v}_{i,j}; \omega_{i,j}\}_{i,j \in \{-1,0,1\}} = \Big\{ \mathbf{v}_{0,0} = (0,0), \mathbf{v}_{\pm 1,0} = (\pm c_0 \sqrt{3}, 0), \mathbf{v}_{0,\pm 1} = (0, \pm c_0 \sqrt{3}), \mathbf{v}_{\pm 1,\pm 1} = (\pm c_0 \sqrt{3}, \pm c_0 \sqrt{3});$$
$$\omega_{0,0} = 4/9, \; \omega_{\pm 1,0} = \omega_{0,\pm 1} = 1/9, \omega_{\pm 1,\pm 1} = 1/36 \}$$

qui, pour $\theta = c_0^2$, produit un système identique au D_2Q_9 de la LBM, fonction d'équilibre (14) comprise.

Pour $N = 4$ et avec $a = c_0 \sqrt{3 + \sqrt{6}}$ et $b = c_0 \sqrt{3 - \sqrt{6}}$, la quadrature, notée $\mathcal{H}_4$, est :

$$\{\mathbf{v}_{i,j} \; ; \; \omega_{i,j}\}_{i,j \in \{-2,-1,1,2\}} = \{ \mathbf{v}_{\pm 2,\pm 2} = (\pm a, \pm a), \mathbf{v}_{\pm 1,\pm 1} = (\pm b, \pm b), \mathbf{v}_{\pm 1,\pm 2} = (\pm b, \pm a), \mathbf{v}_{\pm 2,\pm 1} = (\pm a, \pm b);$$
$$\omega_{\pm 2,\pm 2} = (240 + 96\sqrt{6})^{-1}, \omega_{\pm 1,\pm 1} = (240 - 96\sqrt{6})^{-1}, \omega_{\pm 2,\pm 1} = \omega_{\pm 1,\pm 2} = 1/48 \Big\}$$

Les vitesses de $\mathcal{H}_4$ (Fig. 1b) sont dans des rapports irrationnels, nécessitant l'utilisation d'une interpolation lors du transport, ce qui n'est pas le cas du système de vitesses engendré par $\mathcal{H}_3$ (Fig. 1a), pour lequel il est possible de déplacer les fonctions de distribution exactement sur les nœuds d'un réseau régulier (aspect dont profite grandement la LBM).

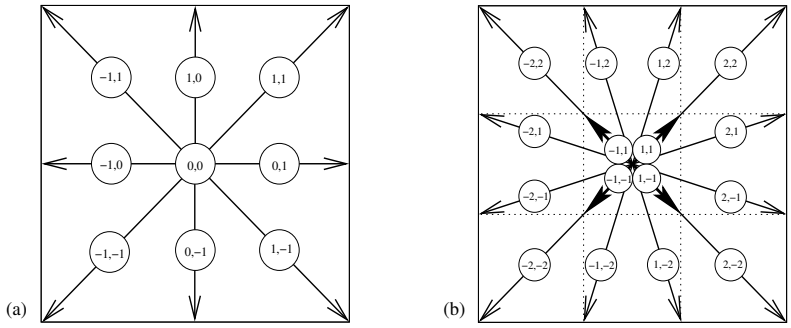

FIG. 1 – Systèmes de vitesses en deux dimensions basés sur $\mathcal{H}_3$ (a) et $\mathcal{H}_4$ (b).

3 Résultats et discussion

Dans cette section sont présentés des résultats obtenus avec les modèles basés sur $\mathcal{H}_3$ et $\mathcal{H}_4$ pour un écoulement de Poiseuille plan en régime stationnaire. Le canal est périodique dans la direction de l'écoulement (x) et sa largeur est H selon y. Le fluide de densité ρ et de viscosité cinématique $\nu = H\, K_n\, c_0$ est mis en mouvement par une force extérieure $F_x = 8\, \rho\, \nu\, u_{max}/H^2$. Le débit de l'écoulement (Fig. 2) et la vitesse de glissement à la paroi (Fig. 3) sont mesurés pour différentes valeurs du Knudsen ($0.001 < K_n < 8$) et pour deux types de conditions aux bords (Bounce-Back et réflexions diffuses). Ces résultats sont comparés à ceux obtenus par

Cercignani [11] à partir de l'équation de Boltzmann-BGK. Pour des parois totalement diffuses (accommodation totale), Cercignani a étendu l'expression de la vitesse de glissement au second ordre en K_n :

$$u_s = 1,1466\, K_n \left.\frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{n}}\right|_{\text{paroi}} - 0,31\, K_n^2 \left.\frac{d^2\mathbf{u}}{d\mathbf{n}^2}\right|_{\text{paroi}} \tag{16}$$

Qui, dans le cas d'un écoulement de Poiseuille plan d'amplitude u_{max}, devient :

$$u_s = u_{max}\, \left(1,1466\, K_n + 2 \times 0,31\, K_n^2\right) \tag{17}$$

Pour ces conditions aux bords, le calcul du débit massique Q normalisé par $6\,\nu\, u_{max}$ donne :

$$Q_0 = (6\, K_n)^{-1} + 1.06045\, K_n + 1,015 \qquad \text{pour } K_n \lesssim 1$$
$$Q_\infty \approx (\pi)^{-1/2} \log(K_n) \qquad \text{pour } K_n > 1$$

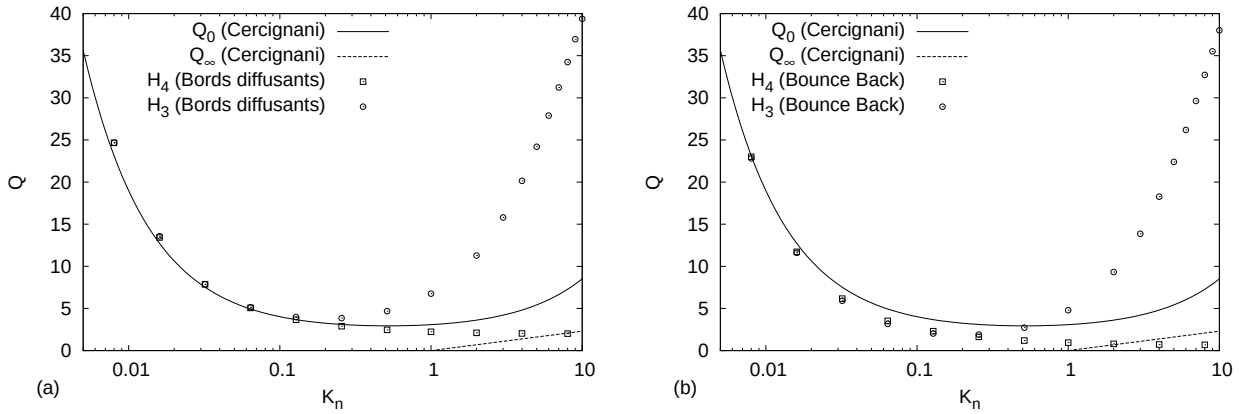

FIG. 2 – Débit massique de l'écoulement en fonction du Knudsen pour les modèles basés sur $\mathcal{H}_3$ (○) et $\mathcal{H}_4$ (□), avec des conditions aux bords diffuses (a) et des conditions aux bords de type Bounce-Back (b).

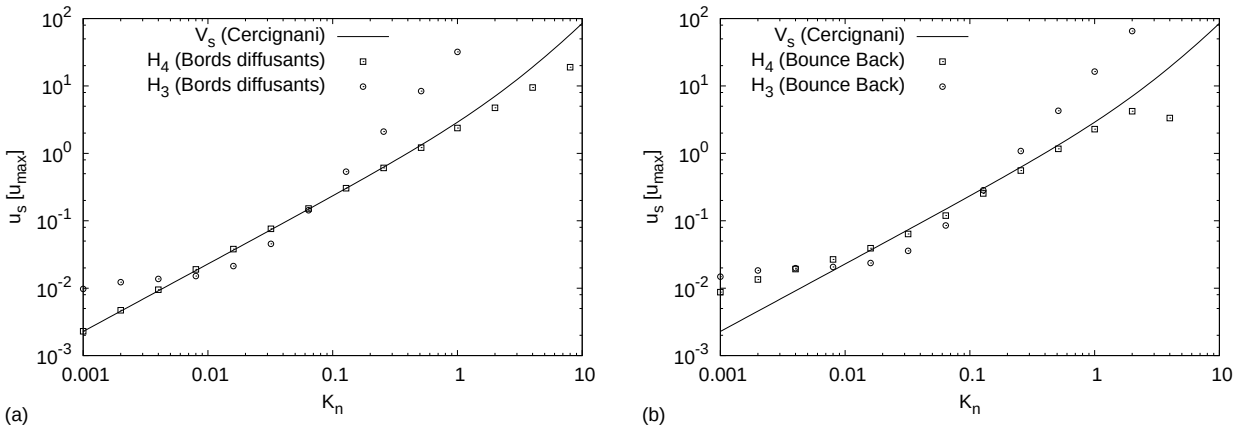

FIG. 3 – Vitesse de glissement en fonction du Knudsen pour les modèles basés sur $\mathcal{H}_3$ (○) et $\mathcal{H}_4$ (□), avec des conditions aux bords diffuses (a) et des conditions aux bords de type Bounce-Back (b).

La figure 2a donne les valeurs du débit pour différentes valeurs du Knudsen pour les modèles basés sur $\mathcal{H}_3$ et $\mathcal{H}_4$ et pour des conditions aux limites diffusantes [11, 12]. Les valeurs obtenues par $\mathcal{H}_3$ correspondent à celles trouvées par F. Toschi et S. Succi [13]. Elles commencent à différer notablement de la solution semi-analytique proposée par Cercignani pour des Knudsen de l'ordre de 0,3. Au-delà de cette valeur, le débit croît de façon importante et le modèle ne permet plus de suivre l'écoulement pour de tels régimes. F. Toschi et S. Succi [13] indiquent que cette croissance du débit est due à la structure des vitesses du système D_2Q_9, dont certaines sont parallèles à la paroi et propose, pour pallier cet effet, d'accroître la relaxation des faisceaux liés à ces vitesses par des collisions virtuelles avec la paroi. En revanche, le modèle $\mathcal{H}_4$ suit les valeurs théoriques

pour des Knudsen plus importants (~ 1) et ne présente pas l'augmentation brutale du débit observée pour le modèle $\mathcal{H}_3$. Cependant, il ne permet pas de rendre compte d'une légère augmentation du débit pour de forts Knudsen (un minimum devrait être observé [14] pour $K_n \approx 1$). Les résultats donnés figure 2b sont obtenus en considérant des conditions aux bords de type Bounce-Back. Les deux types de modèles donnent des résultats similaires jusqu'à des Knudsen de l'ordre de 0,3 qui ne sont en accord avec la courbe théorique que pour le régime hydrodynamique. Pour des Knudsen plus importants, les mêmes observations que pour les conditions aux bords diffusantes peuvent être faites. Les figures 3a et 3b donnent la vitesse de glissement rapportée à la vitesse maximale pour les deux modèles et pour des conditions diffusantes (figure 3a) et bounce-back (figure 3b). La vitesse de glissement est mesurée sur le premier nœud suivant la limite du domaine de simulation. Ces figures montrent une bonne adéquation des résultats obtenus par le modèle $\mathcal{H}_4$ avec les résultats prévus par Cercignani, spécialement lorsque les conditions aux bords sont de type diffusantes. On peut noter que le modèle $\mathcal{H}_3$ fait apparaître un glissement pour des faibles Knudsen, alors que le modèle $\mathcal{H}_4$ suit très bien la courbe théorique.

4 Conclusion

Nous avons présenté ici un nouveau schéma numérique basé sur l'intégration de l'équation de Boltzmann-BGK, capable de simuler des écoulements pour des régimes hydrodynamiques et transitionnels. Ce modèle est basé sur un développement de la fonction de distribution sur la base des polynômes d'Hermite. Limité à 3 termes, on obtient les modèles de Boltzmann sur réseau classiques, appelés D_dQ_q, où d est la dimension et q le nombre de vitesses. Ainsi on retrouve les modèles D_1Q_3, D_2Q_9 et D_3Q_{27}. Les premiers tests ont été effectués avec un modèle bidimensionnel à 4 vitesses par dimension ($\mathcal{H}_4$). Nous avons pu vérifier que, couplé à des conditions aux bords de type diffuses, le glissement obtenu par ce modèle, pour un écoulement de type Poiseuille, est en très bon accord avec les résultats théoriques de Cercignani. Ce modèle peut aussi être utilisé pour des problèmes non-isothermes (travaux en cours). Cependant, pour les résultats présentés ici, les temps de simulations sont environ 2,5 fois plus longs pour le $\mathcal{H}_4$ relativement au $\mathcal{H}_3$ (*i.e.* D_2Q_9). Nous pensons que ce schéma pourra être utilisé avec profit pour simuler des écoulements dans des matrices complexes présentant à la fois des zones poreuses et microporeuses.

Remerciements Le présent travail fait l'objet d'un soutien financier de la Région Centre.

Références

[1] Dardi O. et McCloskey J. Lattice boltzmann scheme with real numbered solid density for the simulation of flow in porous media. Phys. Rev. E, 57, 4834–4837, 1998.

[2] Shan X. et He X. Discretization of the velocity space in the solution of the boltzmann equation. Phys. Rev. Lett., 80(1), 65–68, Jan 1998.

[3] Wolf-Gladrow D. A. Lattice-Gas Cellular Automata and lattice Boltzmann Models. Springer, 2000.

[4] Ansumali S., Karlin I. V., et Ottinger H. C. Minimal entropic kinetic models for hydrodynamics. Europhys. Lett., 63(6), 798–804, 2003.

[5] Zaoui E. et Izrar B. Étude d'un jet confiné en régime transitionnel. XVI-ième Congrès Français de Mécanique, 1-5 septembre 2003.

[6] Bhatnagar P. L., Gross E. P., et Krook M. A model for collision processes in gases. i. small amplitude processes in charged and neutral one-component systems. Phys. Rev., 94(3), 511–525, May 1954.

[7] Omeïri D. et Izrar B. Phénomènes de diffusion dans les mélanges de gaz polyatomiques à haute température. XV-ième Congrès Français de Mécanique, 3-7 septembre 2001.

[8] Lefrançois E. et Izrar B. Transport dans un Couette plan à basse pression et haute température. XV-ième Congrès Français de Mécanique, 3-7 septembre 2001.

[9] Grad H. On the kinetic theory of rarefied gases. Comm. Pure Appl. Math., 2, 331, 1949.

[10] Grad H. Note on N-dimensional Hermite polynomials. Comm. Pure Appl. Math., 2, 325–330, 1949.

[11] Cercignani C. The Boltzmann Equation and Its Applications, volume 67 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, Berlin, Germany ; New York, U.S.A., 1994.

[12] Ansumali S. et V. Karlin I. Kinetic boundary conditions in the lattice boltzmann method. Phys. Rev. E, 66(2), 026311, Aug 2002.

[13] Toschi F. et Succi S. Lattice boltzmann method at finite-knudsen numbers. Europhys. Lett., 69, 549, 2005.

[14] Knudsen M. Ann. Phis. (Berlin), 28, 75, 1909.